

超平面配置の公式化

～「怠けた仕出し屋の数列」と「ケーキ数」から見る規則性～

2021年11月22日提出
3年8組8番 大山 雄生

I はじめに(アブストラクト)

数学における超平面配置の問題は、1970年代から盛んに考察されるようになった。いわゆる「植木算」という問題の高次元化がそのスタートである。「植木算」とは、とある有限の区間に木を等間隔に植えた際に、何本植えることができるだろうか、という小学校の算数でもおなじみの問題である。これは言い換えれば、線分上に点を等間隔に配置したとき、点をいくつ配置できるか、という問題である。この問題を高次元化することによって、さらに複雑な問題へと拡張していったのが、超平面配置の始まりである。本論文では、その超平面配置の考察を「規則性」という観点から考察するために、まず超平面配置というものがどういふものなのかについて述べ(II)、続いてその「規則性」を示し(III)、その「規則性」から超平面配置の一般化・公式化を行い(IV)、最後にこの問題の公式化をどう利用していくかについて述べていく(V)。

II 超平面配置の定義

超平面配置について考察していくにあたって、超平面というものを定義し、超平面配置を解説する必要がある。よって、まずは超平面について定義する。

超平面について、数学の厳密な定義で述べると、 V を体 K 上の n 次元ベクトル空間としたとき、 V 内の $(n-1)$ 次元アフィン空間のことである。これを噛み砕いて説明するために、ある程度の用語を解説する。まず、体とは、いわゆる四則演算、すなわち足し算・引き算・掛け算・割り算の成り立つ集合のことである。代表的なものとして、実数の集合が挙げられる。次に、ベクトル空間とは、その名の通り、ベクトルで構成された空間である。我々が学んできた空間ベクトルの演算が成り立つ空間を一般化したものと考えて良い。厳密には使い分ける必要があるのだが、本論文では同様のものと考えて差支えない。最後に、アフィン空間とは、先ほどのベクトル空間の部分空間を平行移動したもののことである。ここでは空間における平面と同じと考えて問題ない。これにて用語の解説は完了したため、続いて超平面の説明に移る。

先ほどの定義を噛み砕いて説明すると、 V という n 次元のベクトル空間が存在し、そのベクトル空間に存在する一つ下の次元のアフィン空間のことを超平面と呼ぶ、と言える。例を挙げると、3次元空間が存在したときに、その一つ下の次元の空間である、2次元平面のことを超平面と呼ぶ、となる。

超平面が定義できたので、続いては超平面配置というものが何なのかについて述べる。

超平面配置とは、超平面の有限集合のことである。つまり、 n 次元の空間には、 $(n-1)$ 次元の空間を、いくらでも、どんな向きにでも配置することが可能であるため、その全てを集合としてまとめたものを、超平面配置と呼ぶ。

ここまでで、超平面配置の定義の説明が完了したが、もし理解できていなかったとしても、何ら問題は無い。なぜなら、III・IV章と進めていく上で、自然と理解できる内容であるからだ。

次章から、実際に「規則性」から一般化・公式化を行っていく。

III 「怠けた仕出し屋の数列」と「ケーキ数」から見る平面の分割の規則性

(1)「怠けた仕出し屋の数列」

「怠けた仕出し屋の数列」(英:lazy caterer's sequence)とは、円盤に n 本の直線を引いたときの最大分割数 U_n を数列としたものである。この数列はしばしばピザやホットケーキを例として考えられることが多い。ピザがあるとき、このピザをカッターで切り分けていく。この際、切り分けたピースそれぞれの大きさ、つまり面積の差を問わないこととし、少ない回数でできるだけ多くの部分に分けたときの数の並びが、この数列と同義のものである。例えば、ピザに1回のみカッターを入れるとする。そのときの分割は(図1)のようになるだろう。よって、1回だけカッターを入れるとき、ピザは2枚に分けられる。次に、2回カッターを入れるときを考える。その場合、(図2)のように二つのパターンがあり得る。このときできるだけ多くの部分に分けら

れているのは、右図のほうである。よって、2回カッターを入れるとき、できるだけ多くの部分に分けようとする、ピザは4枚に分けられる。

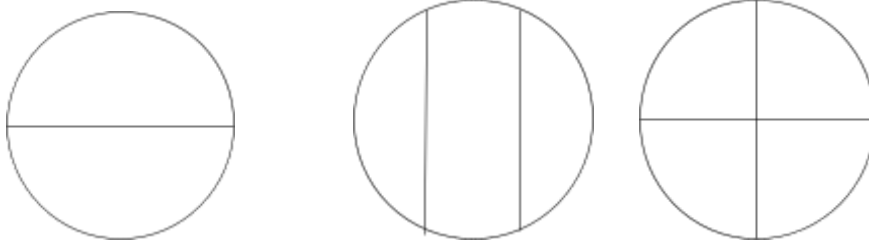


図1 図2

ここまでの例を数学的に言い換えよう。ピザにカッターを1回のみ入れるという作業は、二次元平面上に1本の直線を引くことと同義である。改めて(図1)を見れば、この主張が正しいことが分かるだろう。同じく、2回カッターを入れる作業は、二次元平面上に2本の直線を引くことと同義である。つまり、ピザにn回カッターを入れるという作業が、二次元平面上にn本の直線を引くことと対応しているのである。そして、それにより分けられたピザの枚数というのが分割数を指し、そのなかで最大のものを最大分割数とし、 U_n とよんでいるのである。よって、 $U_1=2$ 、 $U_2=4$ である。

しかし、このピザの考え方と実際の平面の分割には大きな差が存在する。ピザというものはどれだけ大きくとも、有限の大きさしか持たない。しかし、実際に考える平面とは無限に広がっているものを指す。この差は、(図3)と(図4)がピザを考える場合には違うものとして考えられるが、実際の平面では同じであるという違いを生んでしまう。

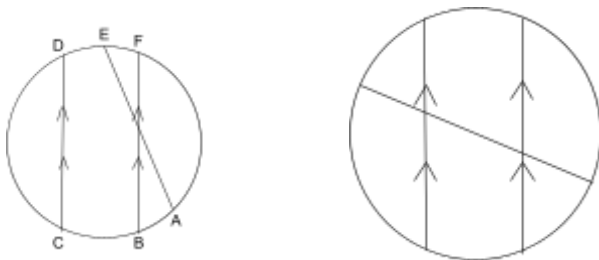


図3 図4

ピザとしてこの二つの図を見比べると、(図3)の分割数は5、(図4)の分割数は6といえる。しかし、実際の平面は無限に続くため、平行でない直線AEと直線CDはいずれ交わってしまい、その交点の部分で平面の分割が起きてしまう。よって、実際の平面上では(図3)と(図4)は全く同じであるため、どちらの分割数も6である。まとめると、二次元平面上の直線による分割を考えるときは、平行か平行でないかだけを考えれば良いということになる。ただし、例外として平行な直線の組は無いが三直線以上が同一の交点を持つように直線を配置できることがある。しかし、そのようになった場合は最大領域数を取るような配置にはならないため、考えなくてもよい。なぜなら、(図5)のようにその同一の交点を持っている直線の組のうち一本を少しだけずらすことによって、分割数を増やすことができるからである。よって、ここから先の展開では、三直線以上が同一の交点を持つことは考えないこととする。

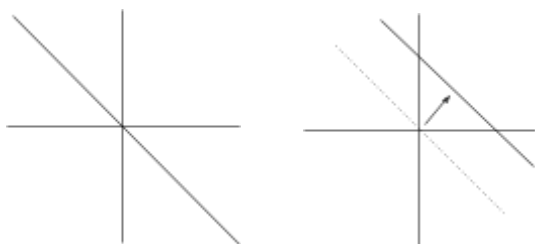


図5

ここまでの話を踏まえて、「怠けた仕出し屋の数列」の一般項について考えていく。そのためにもう少し例を挙げる必要があるため、 $n=3,4$ の場合を考えていくのだが、全てのパターンを示して比較する方法をとると、この後の一般化へのアプローチができないので、別の方法を取る。その方法とは、 $n=3$ の場合を考えると、 $n=2$ のときに最大分割数を取るような直線の配置、つまり(図2)の右図の場合に、さらに直線を1本加えると考え、 $n=4$ の場合を考えると、 $n=3$ のときの最大分割数を取るような直線の配置に、さらに直線を1本加えると考えるものである。これは $n=k$ のときに最大分割数を取るような直線の配置は、 $n=k-1$ の最大分割数を取るような直線の配置を含んでいることから成り立っている。なぜこのように考えて良いのかについては、後の展開で明らかにする。

では、 $n=3$ の場合について考えていく。先ほどの通り、 $n=2$ のときに最大分割数を取るような線分の配置の状態から考えていく。(図2)の右図に線分を一本加えるパターンとしては、(図6)のような二つのパターンが考えられる。(図6)の左図は(図2)の右図の一方の直線と平行になるよう直線を加えた場合、右図はどちらの直線とも平行にならないよう直線を加えたものである。先ほどのピザと実際の平面との差を考えた際に、二次元平面の直線を考える際には、平行か平行でないかだけを考えれば良いという結論にたどり着いたため、考えられるパターンはこの二つのみである。

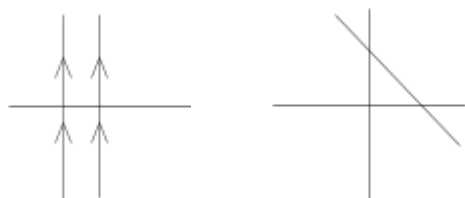


図6

この分割数は左から順に、6,7である。よって、 $n=3$ のときの最大分割数 U_3 は7である。

次に、 $n=4$ の場合について考えていく。これも $n=3$ のときに最大分割数を取るような直線の配置の状態から考えていくのだが、先ほど述べた通り、二次元平面の直線を考えるときは、平行か平行でないかだけを考えれば良いので、 $n=3$ のときの最大分割数を取るような配置を(図6)の右図の配置と述べたが、(図7)も(図6)と同様のものと考えてよい。

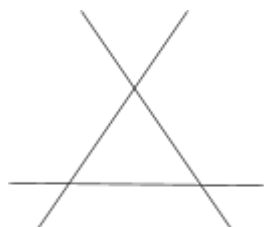


図7

よって、ここで(図7)の形をもとに $n=4$ の場合を考えていく。

$n=3$ のときと同様に、(図7)の図形に1本加えていく。そのパターンとしては、(図8)のようなものが挙げられる。左図は、3本のうち1本と平行な直線を加えたものである。2本以上と平行な直線は作れないので、平行な直線の組があるパターンはこれだけである。右図は平行な直線の組ができないように直線を加えたものである。

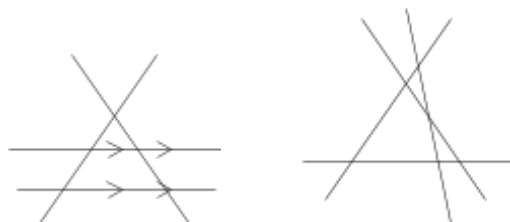


図8

この分割数は左から順に、10,11である。よって、 $n=4$ での最大分割数 U_4 は11である。

では、今までの例をもとに規則性を考えていく。分かりやすいように、 $n=1,2,3,4$ の順で最大分割数を取ったときの図を示してみると、(図9)のようになる。

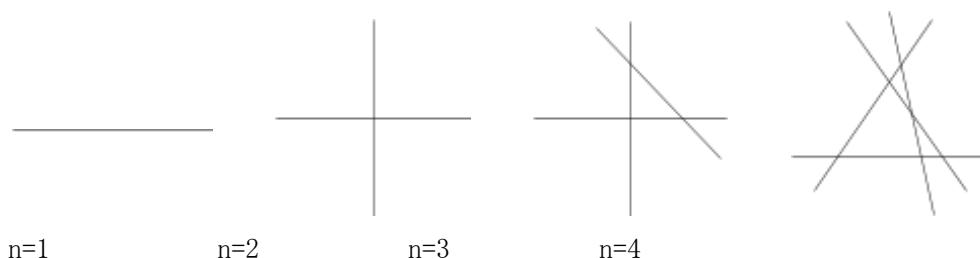


図9

ここから分かることとして、 $n=k$ のとき最大分割数を取るような配置に対して、もとの直線全てと平行でない、つまり全ての直線と交点を持つ(ただし、三直線以上が同一の交点を持つことは考えない)ように直線を加えると、 $n=k+1$ のとき最大領域数を取るような配置になるのではないかと考えられる。実際、どれか一本でも交点を持たない、つまり平行な直線の組になってしまうと、分割数一つ減ってしまうのである。それは、 $n=2$ の例を見れば明らかである。 $n=2$ の場合というのは、(図2)を見ると分かる通り、まさに平行な直線の組と交点を持つ直線の組を表している。そして、交点を持つ場合と平行な直線の組の場合では、平行な直線の組の方が分割数一つ少ないのである。よって、予想は正しいと分かる。

では、具体的にどのような規則性なのか。 $n=k+1$ のとき、 $n=k$ のときの全ての交点に交わるように直線を加えると、新しく加えた直線には交点が k 個あることになる。交点が k 個あるということは、新しく加えた直線が $k+1$ 個に分割されているということである。この分割された半直線、線分は、もとの領域を二つに分割する。つまり、新しく直線を一本加えると、 $k+1$ 個分割数が増えるという規則性が考えられる。これを漸化式で表すと、次のようになる。

$$U_{n+1} = 2, U_n = U_n + (n + 1) \quad (n = 1, 2, 3...)$$

この漸化式から一般項を求めると、

$$U_n = \frac{n^2+n+2}{2} \quad (n = 1, 2, 3...)$$

となる。これが「怠けた仕出し屋の数数列」の一般項である。

(2)「ケーキ数」

次に、「ケーキ数」(英:cake number)の一般項について考えていく。「ケーキ数」の数数列とは、三次元立方体に n 個の平面を配置したときの最大分割数 T_n を数数列としたものである¹。「怠けた仕出し屋の数数列」は、二次元平面を直線、つまり一次元直線で分割するものだったが、「ケーキ数」の数数列は、三次元空間を二次元平面で分割するものであることから、このように言われている。

例をいくつか見ていこう。まずは、 $n=1$ から考えていく。三次元空間に1枚平面を配置すると、分割数は2である。これは(図10)を見れば明らかである。次に、 $n=2$ について考えていく。 $n=2$ のときは、(図11)のように2パターン考えられる。(図11)の左図は2枚の平面が平行に配置されている場合、右図は平面同士が交わる場合である。このとき分割数は、左図の場合は3、右図の場合は4である。よって、 $T_1=2$ 、 $T_2=4$ である。

¹ これはしばしば「怠けた仕出し屋の数数列」の三次元バージョンと呼ばれる。

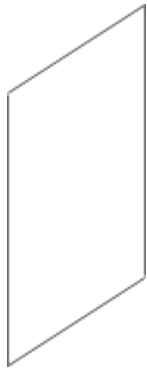


図10

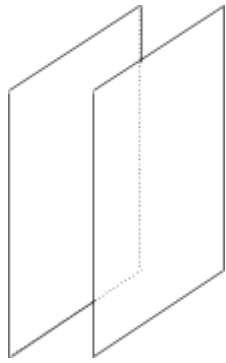
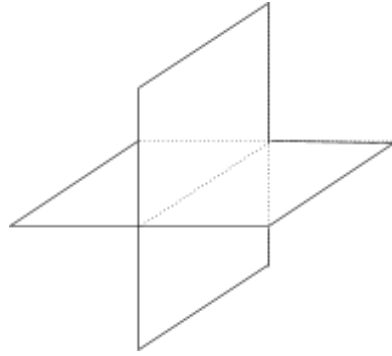


図11



ここで、 $n=3$ について考える前に、確認しておくべき重要なことがある。それは、「怠けた仕出し屋の数列」の際に成り立った、「平面は無限に広がっていること」と「三直線以上が一点で交わる時、最大分割数は取らないこと」と「 $n=k$ のとき最大分割数を取る配置からしか $n=k+1$ の最大分割数を取る配置は作り出せないこと」の三つが、三次元に拡張した場合も成り立つということである。つまり、「三次元空間は無限に広がっている、かつ、分割する平面も無限に広がっていること」と、「三平面以上が一直線上でのみ交わる時、最大分割数は取らないこと」と、「 $n=k$ のとき最大分割数を取る配置からしか $n=k+1$ の最大分割数を取る配置は作り出せないこと」の三つが成り立つのである。証明は「怠けた仕出し屋の数列」の際の証明と同様なので、割愛する。

では、 $n=3$ の場合について考えていく。今回は、「 $n=k$ のとき最大分割数を取る配置からしか $n=k+1$ の最大分割数を取る配置は作り出せないこと」を使って、 $n=2$ のときの最大領域数と取る配置からのみ考える。すると、下記の四パターンが挙げられる(図12)。右から順に、どちらか一面に平行に面を加えている状態、交わっている直線部が平行の場合、そのどちらも満たさない場合である。この場合、分割数は右から順に、6,7,8である。よって、 $T_3=8$ である。

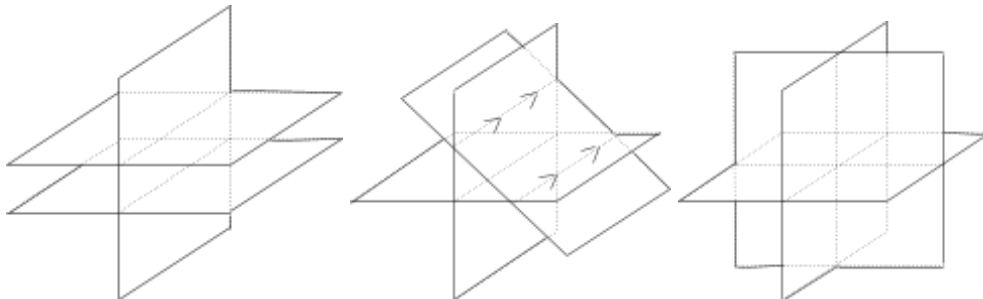


図12

同じ要領で $n=4$ について考えると、(図13)のよう配置が最大領域数を取る配置となり、 $T_4=15$ となる。

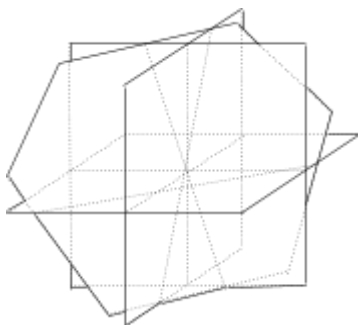
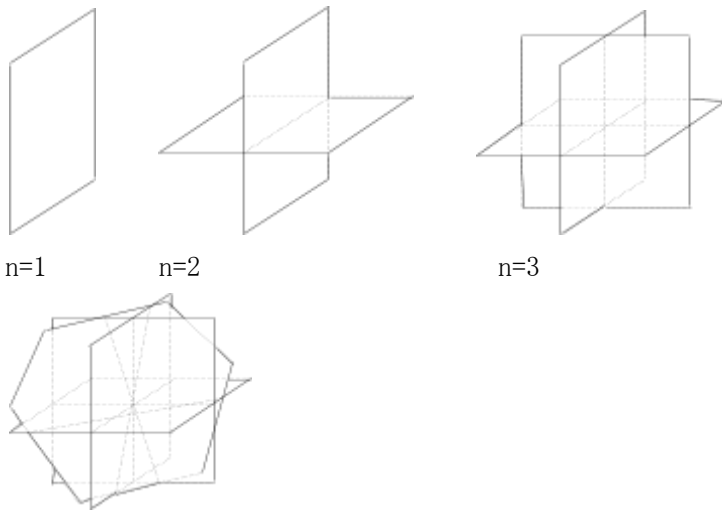


図13

では、規則性を見つけるためにこれらを並べてみよう。



n=4

図14

これも「怠けた仕出し屋の数値」と同じように、加えた平面に注目すると規則性が見えてくる。それぞれ加えた平面とその交線だけを取り出してみると、次のようになる。

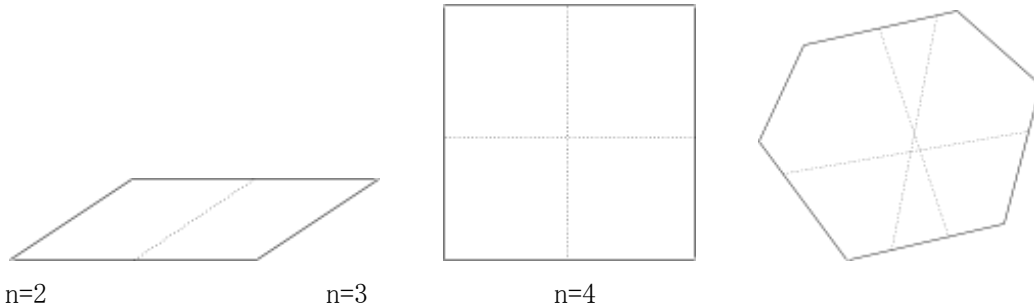


図15

この直線の配置は、「怠けた仕出し屋の数値」の配置と全く同じである(図9)。つまり、「ケーキ数」の数値の規則性には、「怠けた仕出し屋の数値」の規則性が関係していることが分かる。

「怠けた仕出し屋の数値」において、分割された半直線、線分の数だけ分割数が増えるという結論を示したが、それは「ケーキ数」においても同じことが言える。具体的には、 $n=k+1$ のときの最大分割数は、 $n=k$ のときの最大分割数に U_k を足したものである、ということが言える。「怠けた仕出し屋の数値」の際に、「加えた直線が分割されてできた半直線、線分は元あった領域を二つに分割する」と述べたが、「ケーキ数」の数値の場合も、「加えた平面が分割されてできた平面は、元あった領域を二つに分割する」ということが言える。そして、その分割される領域をできるだけ増やす配置は、加えた平面上の交線の配置が「怠けた仕出し屋の数値」の並びになっていなければならない。なぜなら、それが最も多く領域を二つに分割する平面を生み出すからである。これを漸化式で表すと、

$$T_1 = 2, T_{n+1} = T_n + U_n = T_n + \frac{n^2+n+2}{2} \quad (n = 1, 2, 3)$$

となり、この漸化式を解くと、

$$T_n = \frac{n^3+5n+6}{6} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

という一般項が求められる。これが「ケーキ数」の数値の一般項である。

(3)「怠けた仕出し屋の数値」と「ケーキ数」から見る規則性

今回の二つの一般項の求め方を見ると、いくつか共通点がある。そのうち、最も重要な共通点が、「ひとつ前の次元の分割を考慮する」という点である。どういうことかという、と、「怠けた仕出し屋の数値」の場合、

二次元平面を一次元直線で分割する際に、直線同士の交点、つまりゼロ次元の概念に注目して解いた。また、「ケーキ数」の数列の場合、三次元空間を二次元平面で分割する際に、二次元平面同士の交線に注目して解いた。このように、どちらもひとつ前の次元の分割を使うことによって、一般項を出しているのである。それが関係してくる理由としては、さきほどの節で述べた、加えた直線、または平面の交わる点、または直線の配置を、一つ前の次元の最大分割数の配置にしたとき、最も多く領域を半分にする半直線、線分、平面を生み出せるからである。

ここで疑問が生まれる。すなわち、この規則性が全ての次元において成り立っているのならば、四次元空間を超平面(ここでは三次元平面のこと)で分割した場合、また、それ以上の次元での分割を規則性から求めることができるのではないだろうか。次章からは、この点について考察を加えていく。

IV 高次元における超平面配置

(1) 超平面による四次元ベクトル空間の分割

Ⅲ章において、直線による平面の分割、平面による空間の分割について述べ、その規則性を発見した。これからその規則性を用いて、超平面による四次元空間の分割について考えていく。

そもそも四次元ベクトル空間とは、四本の基本ベクトルが互いに独立している空間のことを指す。我々の住んでいる世界は三次元空間であるため、三本の基本ベクトルが独立したベクトル空間であるため、四本目の基本ベクトルは三本の基本ベクトルと独立させることができない(図16)。つまり、我々のいる次元で四次元を完璧に図示することはできない。

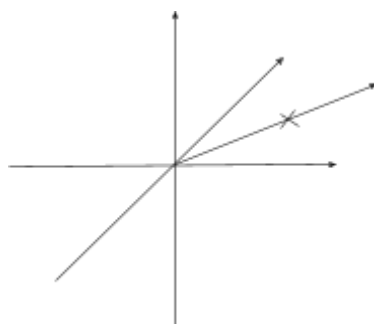


図16

しかし、次のように図示を行えば、四次元空間を疑似的にはあるが、図示することが可能になる(図17)。このように図示すると、三次元空間を平面として考えることで、四本の基本ベクトル全てが独立している状況をつくり出せるのである。

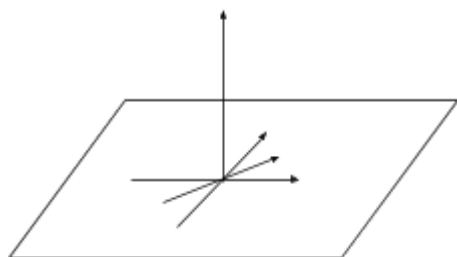


図17

Ⅲ章で述べた規則性によると、四次元空間の超平面による分割は、三次元空間の平面による分割を基にして、求めることができるはずである。しかし、一つの超平面での分割は、今回説明していない、三次元空間の0個の平面による分割を基にして求めるため、そのパターンのみ規則性を使わず求める。

四次元空間を一つの超平面で分割しようとする、一つの超平面の内側と外側のみが存在するため、四次元空間を n 個の超平面で分割したときの最大分割数を S_n とすると、 $S_1=2$ であると言える。

では、 $n=2$ 以降を求めていくが、ここからは規則性を基にして求めていく。

n=2の場合は、三次元空間の1個の平面による分割を基にして求める。規則性によれば、四次元空間を二つの超平面で分割した際に、その断面が(図18)のようになれば、最大分割数になる、という風に考えられる。この(図18)が三次元空間の1個の平面による分割である。では、実際に分割数はいくつなのか。それは、三次元空間の1個の平面の最大分割数の分、四次元空間が分割されるので、四次元空間のn=1の最大分割数2と三次元空間のn=1の最大分割数2を足した、4になる。実際、(図19)のように三次元空間同士が交わっているとすれば、四次元空間は4個の領域に分割されている。

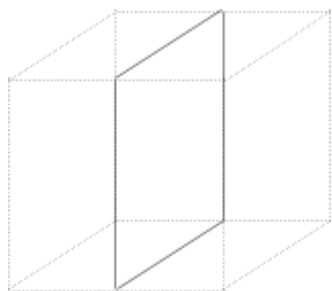


図18

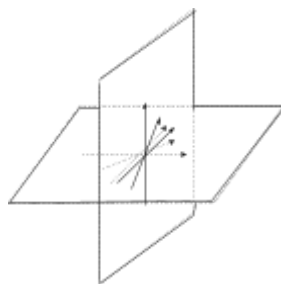


図19

n=3の場合は、三次元空間の2個の平面による分割を基にして求める。n=2のときと同様に、断面が、(図20)のような三次元空間の2個の平面による分割になれば、最大分割数になる。この場合も、三次元空間の2個の平面の最大分割数の分、四次元空間が分割されるので、四次元空間のn=2の最大分割数4と三次元空間のn=2の最大分割数4を足した、8になる。

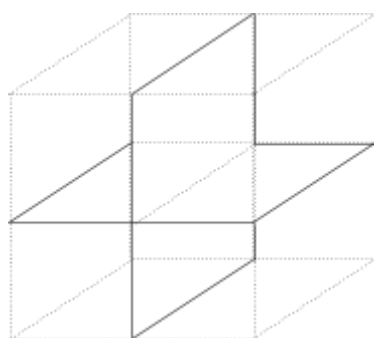


図20

このように求めていくと、四次元空間のn=3の最大分割数8と三次元空間のn=3の最大分割数8の和が、n=4の最大分割数になるので、 $S_4=16$ になる。同様に、四次元空間のn=4の最大分割数16と三次元空間のn=4の最大分割数15の和が、n=5の最大分割数になるので、 $S_5=31$ になる。これをひたすら繰り返せば、 S_n の一般項が求められるので、これを漸化式に表せる。 S_{n+1} は、 S_n と T_n の和になり、III章より T_n の一般項は求めてあるので、漸化式は

$$S_1 = 2, S_{n+1} = S_n + T_n = S_n + \frac{n^3+5n+6}{6}$$

となる。よって、一般項は

$$S_n = \frac{n^4-2n^3+11n^2+14n+24}{24}$$

と表される。

このように考えると、さらに高次元の空間の超平面による分割の最大分割数の一般項を求めることができる。五次元ベクトル空間であれば、五次元空間のn個の超平面による最大分割数を R_n とすると、 R_1 は一つの四次元空間の内側と外側の2個のみであり、五次元空間のn+1個の超平面による最大分割数は、五次元空間のn個の超平面による最大分割数と四次元空間のn個の超平面による最大分割数の和であるため、漸化式は

$$R_1 = 2, R_{n+1} = R_n + \frac{n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n + 24}{24}$$

となり、一般項は

$$R_n = \frac{n^5 - 5n^4 + 25n^3 + 5n^2 + 94n + 120}{120}$$

となる。同様に、六次元空間のn個の超平面による最大分割数を Q_n とすると、漸化式は

$$Q_1 = 2, Q_{n+1} = Q_n + \frac{n^5 - 5n^4 + 25n^3 + 5n^2 + 94n + 120}{120}$$

となり、一般項は

$$Q_n = \frac{n^6 - 9n^5 + 55n^4 - 75n^3 + 304n^2 + 444n + 720}{720}$$

と表せる。

このように、この作業を繰り返していけば、どの次元でもその前の次元の一般項を用いれば、漸化式をたてることができ、その漸化式を解くことで、一般項を導出することができる。よって、次節ではこの法則性を用いて、m次元空間でのn個の超平面による最大分割数の一般項を導出する。

(2) 超平面によるm次元空間の分割

m次元空間でのn個の超平面による最大分割数を $\Gamma_m(n)$ とする。このとき、これまでの $U_n \cdot T_n \cdot S_n \dots$ は次のように表される。

$$U_n = \Gamma_2(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}, T_n = \Gamma_3(n) = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}, S_n = \Gamma_4(n) = \frac{n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n + 24}{24}, \dots$$

このとき、それぞれは次のような関係になる。この関係性は、III章で予想した規則性から求めることができる。これは、それぞれの次元の漸化式に当てはめることと同義なので、代入を行えば、この形を得ることができる。

$$\Gamma_3(n) = \Gamma_3(n-1) + \Gamma_2(n-1)$$

$$\Gamma_4(n) = \Gamma_4(n-1) + \Gamma_3(n-1) = \Gamma_4(n-1) + \Gamma_3(n-2) + \Gamma_2(n-2)$$

では、この関係式をm次元空間で成り立つように漸化式へと昇華させていく。これまでの規則性を用いて、漸化式を変形していくと、次のようになる。

$$\Gamma_m(n) = \Gamma_m(n-1) + \Gamma_{m-1}(n-1) = \Gamma_m(n-1) + \Gamma_{m-1}(n-2) + \Gamma_{m-2}(n-2) = \dots$$

これを繰り返すことで、最終的には、

$$\Gamma_m(n) = \Gamma_m(n-1) + \Gamma_{m-1}(n-2) + \Gamma_{m-2}(n-3) + \Gamma_{m-3}(n-4) + \dots + \Gamma_2(n-m+1) + \Gamma_1(n-m+1)$$

となる。ここでの $\Gamma_1(n)$ はIII章での二次元平面の直線による最大分割数の漸化式を導出した際に求めた、 $n+1$ のことである。つまり、 $\Gamma_1(n-m+1) = n-m+2$ である。よって、これをシグマ記号を使って表すと、次のようになる。

$$\Gamma_m(n) = \left\{ \sum_{k=2}^m \Gamma_k(n-m+k) \right\} + n - m + 2$$

しかし、この等式は $n \geq m$ でしか成り立たない。これでは公式として完全ではないので、 $n < m$ の場合を考えていく。 $n < m$ のとき、 $\Gamma_m(n) = 2^n$ となる。なぜなら、次元数よりも少ない超平面の枚数で分割しようとする、直交座標の軸の本数よりも、超平面の枚数の方が少ないことになる。つまり、全ての超平面を互いに垂直に配置できるということだ。互いに垂直に配置できるということは、 $n-1$ 枚のときの最大分割数をとる配置の全ての分割領域を分割することが可能であるため、分割数は倍々になっていく。よって、分割数は2の累乗になるのである。

以上より、本論文の結論である公式化が完了した。以下にそれを示す。

m 次元空間を n 個の超平面で分割するときの最大分割数を $\Gamma_m(n)$ とすると、次のような関係式が成り立つ。ただし、 $m, n \in \mathbb{N}$ とする。

$$\Gamma_m(n) = \left\{ \sum_{k=2}^m \Gamma_k(n - m + k) \right\} + n - m + 2 \quad (n \geq m)$$

$$\Gamma_m(n) = 2^n \quad (n < m)$$

V 超平面配置がもたらす利益

ここまでの章で超平面配置の公式化を行ってきたが、この問題を解くことによって世の中にどのような利益をもたらすのかについては述べていない。そのため、最後のこの章では超平面配置がもたらす利益について述べていく。

超平面配置の本質は、分割に関する問題であるということだ。つまり、分割に関連する事柄には、この問題が関連する可能性がある。

そこで挙げる例は、ランキングに関する分布と確率についてである。ランキングとは統計学においては「選好順序」と呼ばれ、様々な事柄を人々の好みによって、順位という形で分割するものであり、その分割は超平面配置と深く関わっている。超平面配置を統計におけるランキングの分布と確率の関連に応用することで、人々の好意に揺さぶられてしまう明らかに規則性のない選好順序というものを、semiordeという選好順序モデルを、超平面配置としてとらえることができ、ランキング・パターンの問題の考察に応用できることが紙屋等によって示されている²。

このsemiordeというモデルには、非推移的なものを幾何学的な形で表すことができるという特徴がある。非推移的とは、簡単な例として「じゃんけん」のようなものが当てはまる。じゃんけんは、グーはチョキに勝ち、チョキはパーに勝ち、パーはグーに勝つという関係がある。この「勝つ」という関係を不等号で表すと、グー>チョキ、チョキ>パー、パー>グーというようになる。推移的であるという状態ならば、グー>チョキ、チョキ>パーという関係性が成り立っているとき、グー>パーになるはずなのである。しかし、じゃんけんでは、グー<パーになっている。このように通常の不等号の関係性が成り立たない関係性のことを、非推移的と呼ぶ。

このモデルを用いることによって、ランキングに限らず、人の好みというものを数学的に表すことができ、超平面配置の問題として表すことができる。統計学という数学の分野かつ、心理学の分野においても貢献が期待できる問題となっている。それにより、数学や心理学に限らず、人々の行動に左右される経済学や経営学にも発展をもたらすのではないかと考えられる。

このように超平面配置には、様々な分野での利用が期待され、この問題の解決が進むことによって、より我々の生活が豊かになるだろうと考えられる。

(10764文字 原稿用紙26.9枚相当)

【参考文献および関連URL】

◆小澤徹(2010)「アフィン空間」

<http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/affine.pdf>

◆紙屋英彦(2013)「科学研究費助成事業(科学研究費補助金)研究成果報告書」

<https://kaken.nii.ac.jp/ja/file/KAKENHI-PROJECT-22540134/22540134seika.pdf>

◆竹村彰通(2010)『広がりのある統計学研究をめざして』

<https://www.terrapub.co.jp/journals/jjsi/pdf/4102/41020251.pdf>

² 紙屋英彦(2013)「科学研究費助成事業(科学研究費補助金)研究成果報告書」より

<https://kaken.nii.ac.jp/ja/file/KAKENHI-PROJECT-22540134/22540134seika.pdf>